PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 9
pag. 91-94

SULL'ESISTENZA, SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE, DI SISTEMI CONTINUI COMPLETI INFINITI, LA CUI CURVA GENERICA È A SERIE CARATTERISTICA INCOMPLETA (*)

GUIDO ZAPPA

SVMMARIVM. — Cum, sicut SEVERI praeviderat, iam constet non omnibus continuis systematibus curvarum super superficiem esse seriem propriam completam, Auctor primum exhibet exemplum systematis continui completi infiniti, cuius propria series est incompleta in generica curva.

Esempi di curve algebricamente isolate a serie carattestica non completa sopra una superficie algebrica furono dati recentemente da SEVERI (1), il quale successivamente, prevedendo che il fenomeno della incompletezza della serie caratteristica potesse presentarsi anche per curve algebricamente non isolate, mi propose di ricercare esempi del genere sopra una rigata algebrica. In una mia Nota precedente (2), ho dato l'esempio di una curva, appartenente ad una rigata di genere 2 e ordine 6 dello spazio ordinario, giacente in un sistema continuo ∞^4, e dotata di serie caratteristica incompleta. La curva *generica* del sistema continuo era però sempre a serie caratteristica completa, solo per una curva *particolare* di esse presentandosi il fenomeno dell'incom-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 30 luglio 1945.

(1) *Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Commentarii mathematici Helvetici », 15 (1943), pag. 138-248.

(2) *Sull'esistenza di curve algebricamente non isolate, a serie caratteristica non completa, sopra una rigata algebrica.* « Pontificia Academia Scientiarum », Acta, 7 (1943).

pletezza. Rimaneva pertanto aperta la questione di sapere se possono presentarsi sistemi continui completi infiniti, la cui curva *generica* sia a serie caratteristica incompleta.

La presente Nota risolve il problema fornendo un esempio di un sistema continuo completo ∞^1, situato sopra una rigata algebrica d'ordine 8 e genere 2 dell'S_5, la cui generica curva è a serie caratteristica incompleta.

Ultimamente Severi [1] ha dimostrato il teorema della completezza della serie caratteristica, con metodi puramente algebrici, per le curve di sistemi continui soddisfacenti ad ipotesi di generalità (le quali naturalmente, nel nostro caso non si verificano).

Consideriamo una rigata F, d'ordine 10 e genere 2 dell'S_7 ottenuta congiungendo i punti omologhi di due curve proiettive d'ordine 5 e genere 2 situate in due S_3 sghembi dell'S_7. Sulla F esiste un sistema lineare ∞^1 di curve C d'ordine 5 e genere 2, senza punti base, completo sia come sistema lineare che come sistema continuo: è quello definito dalle due quartiche iniziali. La sua serie caratteristica, d'ordine e dimensione zero, è senz'altro completa.

Proiettiamo F, in un S_5 generico, da una retta l che si appoggi, in due punti generici A_1 e A_2, a due generatrici r_1 ed r_2 costituenti un generico gruppo canonico entro il fascio delle generatrici di F. Otterremo una rigata $\overline{F}$ d'ordine 8 di S_5, birazionalmente equivalente alla F. Ai singoli punti di r_1 ed r_2 corrispondono rispettivamente le direzioni uscenti dai punti semplici P_1 e P_2 in cui r_1 ed r_2 incontrano $\overline{F}$. Ogni curva C di $|C|$ si proietta in una curva $\overline{C}$, d'ordine 5 e genere 2, di $\overline{F}$, passante per P_1 e P_2; onde il gruppo P_1, P_2 è nello stesso tempo un gruppo canonico e un gruppo caratteristico di $\overline{C}$.

Consideriamo il sistema continuo $\}|C|\{$, e facciamo vedere che esso è un sistema ∞^1, costituito unicamente dalle proiezioni delle curve di $|C|$. Ogni curva di $\}|C|\{$ deve infatti essere proiezione o di una direttrice d'ordine 5 di F, o di una direttrice d'ordine 6 passante per

(1) *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Annali di Matematica », serie IV, tomo XXIII, 1944, pag. 149. Severi dimostra ivi che il teorema della completezza vale per tutte le curve *emiregolari* (curve sulle quali le curve canoniche impure della superficie segano serie lineari complete).

uno dei due punti A_1 e A_2, o una direttrice d'ordine 7 passante per A_1 e A_2. Orbene, le direttrici d'ordine 5 di F hanno necessariamente grado zero (¹) e quindi la loro serie caratteristica ha ordine zero e dimensione zero; onde ciascuna di esse appartiene ad un sistema continuo ∞^1. Le direttrici d'ordine 6 di F hanno grado 2, e quindi la loro serie caratteristica è, o una g_2^0, o la g_2^1 canonica; onde ogni tale direttrice appartiene ad un sistema continuo al più ∞^2. Data le genericità di A_1 su F, le direttrici d'ordine 6 per A_1 sono al più ∞^1. Le direttrici d'ordine 7 di F hanno grado 4, la loro serie caratteristica è una g_4^2, e pertanto ciascuna di esse appartiene ad un sistema continuo ∞^3. Data la genericità di A_1 su F, le direttrici d'ordine 7 per A_1 sono ∞^2; e data la genericità di A_2 su r_2, la direttrice generica d'ordine 7 per A_1 non passa per A_2; onde le direttrici d'ordine 7 per A_1 e A_2 sono al più ∞^1. Di qui segue che $\{|C|\}$ è ∞^1, e pertanto si riduce al sistema delle direttrici del 5° ordine di $\overline{F}$ proiezioni delle curve di $|C|$. La serie caratteristica di $\overline{C}$ è quindi ∞^0, e perciò è incompleta, individuando il gruppo P_1, P_2 la g_2^1 canonica. Abbiamo così *un sistema continuo completo* ∞^1, *la cui curva generica è a serie caratteristica incompleta.*

(¹) Ved. Severi, *Sulla classificazione delle rigate algebriche.* «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», serie VI, vol. 2, 1941.