PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 11
pag. 103-126

KONSTRUKTION UND KLASSIFIKATION DES ACHTZELLS 3^4 (*)

(Mit 4 Figuren)

ALBERT ZIRWES S. I.

SVMMARIVM. — Investigatur problema, utrum et quomodo numeri seriei naturalis 1 usque p^n (vel cuiuscunque seriei arithmeticae) in spatio n-dimensionali distribui possint, ita ut statui aequilibrii indifferentis aequiparari queant. Dantur formulae generales et exemplis 3^3 et 3^4 evolvuntur secundum theoriam numerorum et grupporum duae methodi, quibus resolvitur quaestio, quae simul classificationem et enumerationem solutionum necnon generalisationem p^n permittunt. Exemplum maximae symmetriae accuratius discutitur.

EINFÜHRUNG.

Das regelmässige Achtzell Z_8 ist der Masskörper des 4-dimensiolen euklidischen Raumes R_4, so wie Quadrat und Würfel es im R_2 und R_3 sind (1). Die Anzahl N der q-dimensionalen Begrenzungselemente für den allgemeinen n-dimensionalen « Würfel » ist gegeben durch

$$\text{[1]} \qquad N = 2^{n-q}\binom{n}{q} \qquad \text{für } q = 0, 1, 2, 3 \ldots n,$$

sodass die Gesamtzahl der Begrenzungselemente, also

$$\sum_q 2^{n-q}\binom{n}{q} = 3^n \quad ,$$

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 25 settembre 1945.

(1) Für die geometrischen Ausführungen im folgenden vgl. etwa P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, Lpz., 1905.

immer eine Potenz von 3 ist. Es ist eine bekannte Aufgabe der additiven Zahlentheorie, die ersten 9 natürlichen Zahlen so den Ecken, Kantenmitten und der Flächenmitte eines Quadrates zuzuordnen, dass in dem entstehenden quadratischen Zahlenschema die Summe der 3 Zahlen in den Reihen, Spalten und den Diagonalen immer die gleiche, und zwar = 15 ist. Es gibt nur eine Lösung, nämlich

$$\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$$

wenn man die Zahlenverteilung, die durch Rotation oder Spiegelung aus der ersten hervorgeht, als identisch ansieht. Man spricht von einer indifferenten Gleichgewichtslage der Zahlen, eine Ausdrucksweise, die dadurch gerechtfertigt erscheint, dass die Summe der statischen Momente in bezug auf eine beliebige Gerade durch den Mittelpunkt beiderseitig die gleiche ist. Legt man z. B. eine Gerade durch 5,

$$\begin{matrix} 8 & 3/4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & /7 & 2 \end{matrix}$$

die zwischen 3 und 4 einerseits und 6 und 7 anderseits hindurchgeht, so haben die Zahlen 1 und 9 die doppelte Entfernung von der Geraden wie 3 und 6 oder 4 und 7; die Zahlen 8 und 2 haben die dreifache Entfernung, sodass die Summe der statischen Momente beträgt:

$$(3+6)\cdot \mathit{1} + 1\cdot \mathit{2} + 8\cdot \mathit{3} = (4+7)\cdot \mathit{1} + 9\cdot \mathit{2} + 2\cdot \mathit{3}$$
$$35 = 35$$

In der vorliegenden Arbeit soll die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen untersucht werden; denn für die Verallgemeinerung in der Ebene, also für die höheren Zahlenquadrate $4^2, 5^2$ usw. gibt es viele systematische Lösungen, auf die deswegen nicht weiter eingegangen sein soll (1). Mit der Verteilung der natürlichen Zahlen in Zahlenkuben hat sich sicher schon FERMAT beschäftigt. In einem Brief an Rev. Père MERSENNE de l'Ordre des Minimes (undatiert, wohl

(1) Vgl. z. B. verschiedene Abhandlungen in Vol. 7 der Series I. von L. EULERI, *Opera omnia*, Lipsiae et Berolini, 1923, und die in der dortigen Einleitung angeführte neuere Literatur.

um 1640) schreibt er: (¹) « Je passe bien plus outre en passant aux solides qui le sont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longeur, que de hauteur, fassent un même nombre et determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit étre rangé, ce qui est, ce me semble, une des plus belles choses de l'Arithmetique » ... Wie so öfters bei FERMAT ist uns nichts Näheres über die erwähnte Verteilungsregel und das Abzählprinzip überliefert; und das dem Brief beigefügte Beispiel 4^3 scheint nicht den aufgestellten 72 Forderungen entsprochen zu haben; denn in einem späteren Brief an denselben Pater bemerkt er zu den Einwendungen FRÉNICLES: « Pource qui est des cubes, je n'en say pas plus que Monsieur Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les Diagonales seules de quarrez que nous pouvons supposer paralleles à l'Horison, seront égales aux côtez des quarrez, ce qui n'est pas peu de chose ». Es ist sogar unwahrscheinlich, dass FERMAT die Zahlenverteilung für 3^3 gekannt hat; sonst lässt es sich nur schwer erklären, dass bis in die heutige Zeit eine Verteilung der Zahlen 1 bis 27 in dem Würfel 3^3 gewöhnlich als unmöglich angegeben wird, obwohl 4 verschiedene Lösungen existieren. Im Sinne FERMATS ist eine Lösung allerdings nicht möglich, weil er die Forderungen für die Flächendiagonalen und nicht für die Körperdiagonalen des Würfels stellt.

I. FORMULIERUNG EXAKTER BEDINGUNGEN.

Weil bei den höher-dimensionalen Körpern noch die Zelldiagonalen usw. hinzukommen, ist eine genaue Angabe notwendig, für welche Diagonalen die Forderung gleicher Zahlensumme gestellt wird. Beim n-dimensionalen Masskörper p^n (d. h. einem solchen, bei dem in jeder Kante p Zahlen stehen), ist die Anzahl der verschiedenen Diagonalen

[2] $$\mathrm{D}_k = 2^{k-1}\binom{n}{k}p^{n-k} \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

wo D_1 die Gesamtheit aller Zahlenreihen parallel den n Dimensionsachsen,

(¹) *Varia Opera Mathematica*, Tolosae, 1679, pp. 174, 177.

D_2 die Flächendiagonalen in allen Schichten,
D_3 die Würfeldiagonalen in allen p^3,
D_4 die Zelldiagonalen in allen p^4 bedeutet usw.

Ist p ungerade, so ist der Mittelpunkt des p^n mit einer Zahl besetzt. Die Gesamtheit der D_k-Richtungen durch diesen beträgt also, da sie unabhängig von p ist,

$$\sum_k 2^{k-1}\binom{n}{k} = \frac{1}{2}(3^n - 1) \quad . \tag{3}$$

Wir stellen jetzt die Minimalforderung auf: Die gleiche Summe der p Zahlen $(p > 2)$ soll vorhanden sein

1) für alle p^n	in allen D_1 und D_n;
2) für ungerades p	auch in allen D_k durch den Mittelpunkt;
3) für $p \geqq 2^n - 1$	in allen D_k überhaupt;
4) für $p \geqq 2^n + 1$ (p ungerade)	auch in allen Parallelen zu den D_k, den sogenannten Nebendiagonalen.

Unter Berücksichtigung, dass in der Formel [3], die für die Forderung 2) gilt, die D_1 und D_n durch den Mittelpunkt mitgezählt sind, ergeben sich für die Fälle 3^3 und 3^4 37 bzw. 144 Bedingungen.

II. KONSTRUKTION DES 3^3 IM R_3 NACH ZWEI METHODEN.

Nach diesen allgemeinen Klarstellungen sei der Anschaulichkeit halber die Konstruktion des Würfels 3^3 vor der des Achtzells 3^4 behandelt. In einem Würfel seien die Ecken, Kantenmitten usw. mit einer der Zahlen 0, 1 oder 2 bezeichnet, wie es Figur 1 angibt. In den Kantenmitten steht die fehlende Zahl, in den Flächenmitten entweder 0 oder 2, derart dass eine Flächendiagonale alle 3 Zahlen enthält, die andere also dieselbe Zahl dreimal. Im Körpermittelpunkt stehe 1. Wir stellen fest, dass die Summe der 3 Zahlen in allen D_1 und D_3 die gleiche ist, nicht aber in allen D_2 in den Flächen, wohl in denen durch den Mittelpunkt. Unter Beibehaltung der zur Körperdiagonalen 1, 1, 1 senkrechten « Einerebene » gibt es noch eine andere Lösung, eben die, in der die Zahlen 0 und 2 vertauscht sind. Wir bilden jetzt

dreiziffrige Zahlen in den verschiedenen Punkten des Würfels. Die erste Ziffer sei gegeben durch irgend eine Lage des Würfels, die zweite und dritte durch andere Raumlagen des Würfels, die durch Drehung oder Spiegelung hervorgehen, wobei nur darauf zu achten ist, dass die Körperdiagonale 1, 1, 1 jedesmal eine andere Lage hat. Da für jede

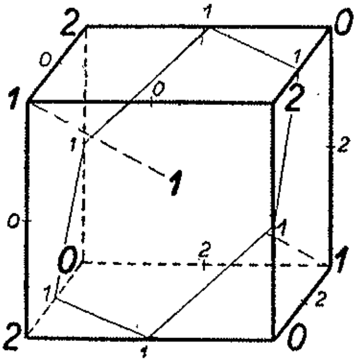

Fig. 1.

der 4 möglichen Richtungen 2 Zahlenverteilungen zur Verfügung stehen und die Reihenfolge der Auswahl beliebig ist gibt es also $\binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 3!$ Lösungen, die aber nicht alle von einander verschieden sind. Um nur verschiedene Lösungen zu erhalten, ist noch durch die Ordnungszahl der erweiterten Bewegungsgruppe des Hexaeders (also durch 48) zu dividieren. Man erhält daher 4 verschiedene Zahlenverteilungen. Die orthogonalen Transformationen mit $\Delta = -1$ können zur Bewegungsgruppe gezählt werden, weil z. B. eine Spiegelung im R_3 eine wirkliche Bewegung im R_4 ist; ein Würfel a^3 lässt sich im R_4 durch eine Doppeldrehung um ein Paar zu einander orthogonaler Ebenen so bewegen, dass alle seine Eckpunkte in die gegenüberliegenden überführt werden. Man überzeugt sich sofort, dass durch die oben angegebene Zahlenbildung alle 27 Kombinationen von 000 bis 222 vorkommen müssen. Bezeichnet man sie der Grösse nach mit 1, 2, ... bis 27, oder was dasselbe ist, geht man vom Dreiziffernsystem unter Addition von 1 zum Zehnziffernsystem über, so sind die Zahlen 1 bis 27 so im Würfel verteilt, dass sie den 37 Bedingungen genügen.

Eine andere Art der Lösung ist folgende. Wir sahen oben in Fig. 1, dass in den Flächenmitten, also in den Koordinatenachsen, nur die Ziffer 0 oder 2 vorkommt. In den Flächenmitten des endgültigen Würfels können also nur solche Zahlenkombinationen vorkommen, die im Dreiziffernsystem keine 1 enthalten. Solcher Kombinationen gibt es aber nur 4 Paare, nämlich die den Zahlenpaaren 1/27, 3/25, 7/21 und 9/19 zugeordneten. Unter einem Zahlenpaar verstehen wir hier 2 diametral gegenüberliegende Zahlen. Für die 3 Koordinatenachsen ist also eine Auswahl aus vieren zu treffen, sodass die Anzahl der Lösungen $\binom{4}{3} = 4$ ist. Mit der Festlegung von 3 Zahlenpaaren in den Flächenmitten sind auch alle anderen Zahlen eindeutig bestimmt, ohne dass man auf das Dreiziffernsystem zurückgehen muss. Eine Lösung sei als Beispiel gegeben, und zwar die, welche durch Rotation des Würfels der Fig. 1. um eine Körperdiagonale 0-2 entsteht:

1	17	24	15	*19*	8	26	6	10
23	*3*	16	*7*	14	*21*	12	*25*	5
18	22	2	20	*9*	13	4	11	**27**

Die 3 Zahlenquadrate hat man sich über einander zu denken. Für das Oktaeder der Flächenmitten wurden hier die Zahlenpaare 3/25, 7/21 und 9/19 gewählt. Im mittleren Quadrat stehen in den Ecken die arithmetischen Mittel der beiden nicht anliegenden Kantenmitten; so ist 15 der Mittelwert von 9 und 21. Das gleiche gilt für die Quadrate, die in den anderen Koordinatenebenen liegen. Das fehlende Zahlenpaar 1/27 kommt in zwei der 8 frei gebliebenen Ecken zu stehen, und zwar dorthin, dass die Verbindung 1-3 und 25-27 dieselbe Lage hat wie etwa 7-9 oder 19-21, die die gleiche Differenz haben. Die restlichen Zahlen können dann durch Differenzenbildung ausgefüllt werden. Auf die Gleichgewichtslage der Zahlen wird später in der Arbeit noch eingegangen werden.

Die Bedingungen 1) und 2) wurden oben als Minimalforderungen bezeichnet. Es gibt nämlich im Würfel noch andere Weisen, in der man die gleiche Summe von je 3 Zahlen bilden kann. Ein Würfel kann auf 4 Arten in einem regelmässigen Sechseck geschnitten werden,

nämlich senkrecht zu einer Körperdiagonalen durch 6 Kantenmitten und den Körpermittelpunkt. Im obigen Beispiel sind die 4 Schnitte

16 22	22 23	23 17	17 16
8 14 20	13 14 15	20 14 8	15 14 13
6 12	5 6	11 5	12 11

Die Summe der 3 Zahlen, die in den Schnitten die Ecken eines regelmässigen Dreiecks bilden z. B. 8, 22, 12, ist 42, wie in den D_1 und D_3. Von den 4 Schnitten ist einer jeder Lösung eigen (dieser enthält nur gerade Zahlen); während jeder der 3 anderen auch bei einer anderen der 4 Lösungen vorkommt.

III. KONSTRUKTION DES 3^4 IM R_4 NACH DER ERSTEN METHODE.

Bei der Konstruktion des 3^3 in beiden Lösungsarten wurden eingehender gerade die Einzelheiten behandelt, die einer induktiven Verallgemeinerung fähig sind. So genügt es jetzt, die Konstruktion

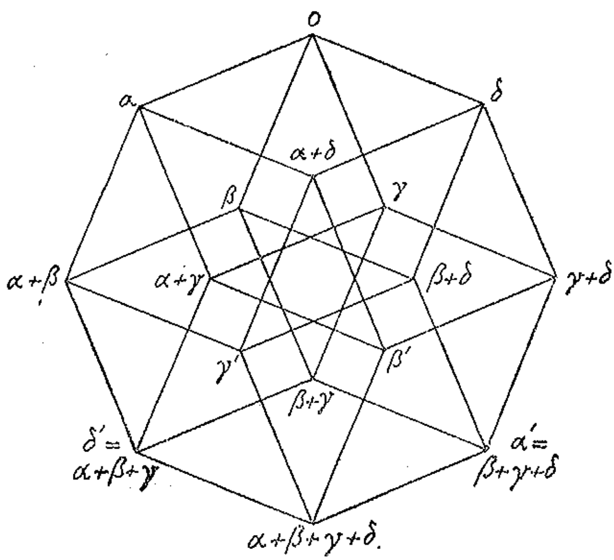

Fig. 2.

des 3^4 in Kürze anzudeuten. Das Achtzell ist nach Formel [1] begrenzt von 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadratflächen und 8 Würfeln. Figur 2. stellt eine orthogonale Projektion desselben auf eine Ebene dar (¹). Irgend ein Eckpunkt sei mit 0 bezeichnet; an den Enden der von dieser Ecke ausgehenden Kanten sollen die von 0 verschiedenen Zahlen α, β, γ, δ stehen. Durch « Vektoraddition » findet man die Zahlen an allen anderen Ecken. Zwei diametral gegenüber stehende Zahlen haben als Summe immer $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Da, wie beim Würfel der Fig. 1, einer 0 immer eine 2 gegenüber stehen muss, ist $\alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 2 \pmod 3$ zu wählen. Es gibt 5 Lösungen für die Kongruenz, nämlich

	α	β	γ	δ	Σ
1.	2	2	2	2	$8 \equiv 2$
2.	2	1	1	1	$5 \equiv 2$
3.	1	2	1	1	$5 \equiv 2$
4.	1	1	2	1	$5 \equiv 2$
5.	1	1	1	2	$5 \equiv 2$

(mod 3)

Wählt man etwa die letzte Reihe, also $\alpha=\beta=\gamma=1$ und $\delta=2$, so erhält man eine Zahlenverteilung, wie sie Figur 3. angibt. Noch an weiteren 4 Eckpunkten tritt hier eine 0 auf, und zwar derart, dass gerade die 4 anderen Lösungen der Kongruenz alle vertreten sind. Das ist bei jeder Auswahl aus den 5 Lösungen der Fall, sodass es wesentlich nur eine derartige Zahlenverteilung gibt. Die Zahlen in den Kanten-, Flächen- und Körpermitten werden bestimmt, wie für den Würfel angegeben wurde. In der Zellmitte steht eine 1. Wir stellen auch hier fest, dass in den 4 Koordinatenachsen, also in den 8 Würfelmittelpunkten nur die Zahlen 0 oder 2 vorkommen. Die Summe in den 8 Zelldiagonalen D_4 ist die gleiche wie in allen D_1. Die Ebenen, die durch den Zellmittelpunkt un die beiden Eckpunkte α und β, bzw. β und γ oder α und γ, bestimmt sind, enthalten jede neunmal die Zahl 1 in quadratischer Anordnung. Bei den R_4-Bewegungen zur Bildung vierziffriger Zahlenkombinationen darf eine solche « Einerebene » höchstens noch einmal mit sich selbst oder einer an-

(¹) s. S. L. VAN OSS, Verh. d. K. Ak. d. Wetensch. Amsterdam, Deel VII, 1, (1901).

deren zusammenfallen. Auszuschliessen sind also solche wiederholte Drehungen, bei denen diese Ebenen als Rotationsebenen ganz in Ruhe bleiben; wie auch solche, bei denen sie in sich selbst um den Mittelpunkt rotieren; endlich auch solche, bei denen sie ineinander über-

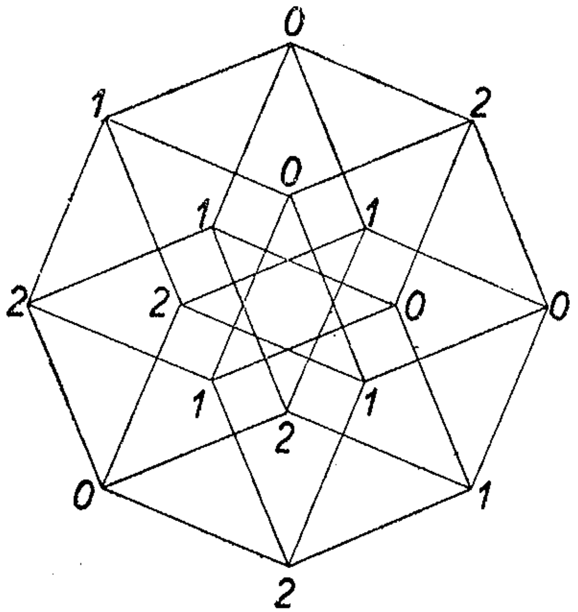

Fig. 3.

geführt werden [1]. Die Ordnung der erweiterten Bewegungsgruppe ist $2^4 \cdot 4! = 384$, sodass trotz der obigen Einschränkungen noch sehr viele Bewegungen und daher auch Lösungen möglich sind. Zur genauen Bestimmung der Anzahl und zur Klassifikation der Lösungen bedienen wir uns der zweiten Lösungsmethode.

---

(1) Eine genauere Definition für den Ausschluss wird später gegeben werden.

IV. KLASSIFIKATION UND KONSTRUKTION NACH DER ZWEITEN METHODE.

Rein schematisch kann eine quadratische Anordnung von 81 Zahlen, wie sie in den weiter unten stehenden Lösungen zur Anwendung kommt, ein Zahlenachtzell darstellen. Im folgenden Quadrat, wo jeder Buchstabe wieder ein Quadrat von 9 Zahlen vertritt, hat man sich A über B und C als Würfel vorzustellen und zugleich in der 4. Dimension A auch über D und G. Ebenso D über E und F;

```
-  -  -    -  -  -    -  -  -
-  A  -    -  B  -    -  C  -
-  -  -    -  -  -    -  -  -

-  -  -    -  +  -    -  -  -
-  D  -    +  E  +    -  F  -
-  -  -    -  +  -    -  -  -

-  -  -    -  -  -    -  -  -
-  G  -    -  H  -    -  J  -
-  -  -    -  -  -    -  -  -
```

B über E und H; dann noch G über H und J, und endlich C über F und J. Von den 4 Koordinatenachsen gehen 2 durch die mit einem + bezeichneten Punkte, die 3. durch F und D; die 4. durch B und H. Das sind die Mittelpunkte der 8 Grenzwürfel. Zur Besetzung dieser Punkte mit Zahlen stehen 8 Paare zur Verfügung, die in den zugeordneten Viererkombinationen des Dreiziffernsystems keine 1 enthalten, und zwar

1/81 3/79 7/75 9/73 19/63 21/61 25/57 27/55.

Die hier zu treffende Viererauswahl ist aber nicht mehr ganz willkürlich, wie es beim 3^3 der Fall war. Wählt man etwa für die Konstruktion des Würfels D, E, F 3 Zahlenpaare aus und bestimmt durch Mittelwert- und Differenzenbildung die anderen Zahlen dieses Würfels, so kann es vorkommen, dass die Zahlen eines der 5 restlichen Paare schon in diesem Würfel auftreten, also für die Besetzung der 4. Koor-

dinatenachse nicht mehr in Frage kommen. Das ist immer und nur dann der Fall, wenn bei den ausgewählten 4 Paaren (sie seien nur noch mit der kleineren Zahl bezeichnet) dieselbe Differenz zweimal auftritt. So gibt es 12 Ausnahmefälle:

6 Fälle:	1-3 7-9	7-9 19-21	mit gleicher Zweierdifferenz,
	1-3 19-21	7-9 25-27	
	1-3 25-27	19-21 25-27	
1 Fall:	3-7 21-25		mit gleicher Viererdifferenz,
4 Fälle:	1-7 19-25	3-9 19-25	mit gleicher Sechserdifferenz,
	1-7 21-27	3-9 21-27	
1 Fall:	1-9 19-27		mit gleicher Achterdifferenz.

Die Gesamtzahl der Auswahlmöglichkeiten und somit der verschiedenen Lösungen beträgt also $\binom{8}{4} - 12 = 58$. Die Klassifikation erfolgt nach den verschiedenen räumlichen Lagen, die die nicht ausgewählten Zahlenpaare im Achtzell einnehmen können. Zu diesem Zweck teilen wir die 8 Zahlenpaare in zwei Klassen ein, je nachdem bei ihnen im Dreiziffernsystem die Ziffern 0 und 2 in gerader (I. Klasse) oder ungerader Anzahl (II. Klasse) vorhanden sind.

I. Klasse:	1/81	9/73	21/61	25/57	von der Form $4m+1$
II. Klasse:	3/79	7/75	19/63	27/55	von der Form $4m+3$

Erster Fall: Aus einer Klasse seien alle, aus der anderen also kein Zahlenpaar zur Besetzung der Würfelmittelpunkte gewählt. Es gibt $2 \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{0} = 2$ Möglichkeiten. In beiden Fällen stehen die nicht gewählten 4 Zahlenpaare symmetrisch in 8 Ecken des Achtzells.

Zweiter Fall: Aus einer Klasse seien 3, aus der anderen also noch 1 Zahlenpaar gewählt. Es gibt $2 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} = 32$ Möglichkeiten. Das in einer Klasse nicht gewählte Paar steht in einer Ecke, die drei anderen in Kantenmitten.

Dritter Fall: Aus beiden Klassen seien je 2 gewählt; hier treten die erwähnten Ausnahmefälle auf. Stehen die gewählten Paare im obigen Klassenschema beide über einander oder ganz getrennt, so treten

gleiche Differenzen auf. Diese beiden Fälle sind also auszuschliessen, sodass es noch $\binom{4}{2}\cdot\left(\binom{4}{2}-2\right)=24$ Möglichkeiten gibt. Die nicht gewählten Paare treten nur in Kantenmitten auf.

Durch die Festlegung von 4 Zahlenpaaren für die Würfelmittelpunkte sind wie beim 3^3 auch alle anderen Zahlen eindeutig bestimmt. Seien X diese 8 Zahlen, so finden sich durch Mittelwertbildung zwischen diesen alle mit einem * bezeichneten Zahlen. Es sind die Flächen-

-	-	-	-	*	-	-	-	-
-	*	-	*	X	*	-	*	-
-	-	-	-	*	-	-	-	-
-	*	-	*	X	*	-	*	-
*	X	*	X	-	X	*	X	*
-	*	-	*	X	*	-	*	-
-	-	-	-	*	-	-	-	-
-	*	-	*	X	*	-	*	-
-	-	-	-	*	-	-	-	-

mittelpunkte des Achtzells oder auch die Ecken der Quadrate, die in den 6 Koordinatenebenen liegen. Da, wie wir oben sahen, die Zahlenpaare mit gleicher Differenz auch gleiche Raumlage haben, so kann man die fehlenden Zahlenpaare (wenigstens in 56 von 58 Fällen) sofort in das Schema eintragen, wie in den beiden letzten der nun folgenden 4 Beispiele zu der obigen Klassifikation zu ersehen ist. Alle anderen Zahlen lassen sich durch Differenzenbildung finden, oder auch durch Mittelwertbildung allein zwischen allen Zahlen der I. und II. Klasse. Die konstante Summe von je 3 Zahlen in den D_1 und D_4

e	*k*	*e*	*k*	*f*	*k*	*e*	*k*	*e*
k	*f*	*k*	*f*	*w*	*f*	*k*	*f*	*k*
e	*k*	*e*	*k*	*f*	*k*	*e*	*k*	*e*
k	*f*	*k*	*f*	*w*	*f*	*k*	*f*	*k*
f	*w*	*f*	*w*	*z*	*w*	*f*	*w*	*f*
k	*f*	*k*	*f*	*w*	*f*	*k*	*f*	*k*
e	*k*	*e*	*k*	*f*	*k*	*e*	*k*	*e*
k	*f*	*k*	*f*	*w*	*f*	*k*	*f*	*k*
e	*k*	*e*	*k*	*f*	*k*	*e*	*k*	*e*

beträgt beim Achtzell 123. Nach den früher aufgestellten Bedingungen muss sie sich wenigstens 144 Mal bilden lassen. In den beiden Lösungen des 1. Falles hat ausserdem je eine Diagonale der 24 Grenzquadrate diese gleiche Summe. Zur leichteren Übersicht in den Zahlenbeispielen sei die Lage der verschiedenen Achtzellpunkte noch einmal zusammengestellt. Es bedeuten:

e = 16 Eckpunkte
k = 32 Kantenmittelpunkte
f = 24 Flächenmittelpunkte
w = 8 Würfelmittelpunkte
z = 1 Zellmittelpunkt.

14	48	**61**	52	59	12	**57**	16	*50*
36	67	20	65	27	31	22	29	72
73	8	*42*	6	37	80	*44*	78	**1**
28	71	24	69	19	35	26	33	64
77	3	43	7	41	75	39	79	5
18	49	56	47	63	13	58	11	54
81	4	*38*	2	45	76	*40*	74	**9**
10	53	60	51	55	17	62	15	46
32	66	**25**	70	23	30	**21**	34	*68*

14	46	**63**	54	59	10	**55**	18	*50*
34	69	20	65	25	33	24	29	70
75	8	*40*	4	39	80	*44*	76	**3**
30	71	22	67	21	35	26	31	66
77	1	45	9	41	73	37	81	5
16	51	56	47	61	15	60	11	52
79	6	*38*	2	43	78	*42*	74	**7**
12	53	58	49	57	17	62	13	48
32	64	**27**	72	23	28	**19**	36	*68*

Die beiden Lösungen des ersten Falles

X	–	–	–	–	–	–	–	27
1	44	–	42	73	–	–	–	–
50	57	X	61	14	–	X	–	–
–	–	–	–	19	–	–	–	–
–	3	–	7	–	75	–	79	–
–	–	–	–	63	–	–	–	–
–	–	–	–	68	21	–	25	32
–	–	–	–	9	40	–	38	81
55	–	–	–	–	–	–	–	–

Zweiter Fall

–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	42	73	–	79	–	–
–	55	–	61	14	–	–	–	–
–	–	–	–	19	–	25	32	–
–	1	44	7	–	75	38	81	–
–	50	57	–	63	–	–	–	–
–	–	–	–	68	21	–	27	–
–	–	3	–	9	40	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–

Dritter Fall

V. EINZELHEITEN ZU DEN 3 KLASSIFIKATIONSFÄLLEN.

Es lohnt sich, etwas näher auf den ersten Fall einzugehen, weshalb auch beide Lösungen gebracht wurden. Er zeigt von den drei Fällen die grösste Symmetrie. Ein Achtzell kann den Eckpunkten nach in zwei 16-Zelle (Z_{16}) zerlegt werden, analog wie der Würfel in zwei Tetraeder. Ein Z_{16} ist ein reguläres Polytop des R_4, das von 16 Tetraedern begrenzt wird und 8 Ecken hat; es ist das duale Gebilde zum Z_8. Die Kanten der beiden Z_{16} sind die Flächendiagonalen des Z_8. Achten wir zunächst auf die gesetzmässige Verteilung der geraden und ungeraden Zahlen. Die Zahlen der I. und II. Klasse sind nur ungerade Zahlen. Sie stehen in den Würfelmittelpunkten (w), (die der Lage nach auch ein Z_{16} bilden), und in den 8 Eckpunkten (e) eines der beiden Z_{16}. Die 8 Eckpunkte (e) des anderen Z_{16} enthalten nur gerade Zahlen; im Dreiziffernsystem entsprechen ihnen solche Kombinationen, die dreimal eine 1 enthalten; (sie seien fernerhin als Zahlen einer III. Klasse bezeichnet). Die beiden Lösungen unterscheiden sich dadurch, dass die Zahlen der ersten und zweiten Klasse vertauscht werden, während das Z_{16} mit geraden Zahlen beiden gemeinsam ist. In den 32 Kantenmitten (k) stehen nur gerade und in den 24 Flächenmitten nur ungerade Zahlen. Beim Z_{16} mit ungeraden Eckzahlen steht in der Mitte der 24 Kanten immer das arithmetische Mittel der beiden Ecken. So sind z. B. die 6 von Ecke [1] ausgehenden Kanten (Flächendiagonalen): 1-5-9; 1-11-21; 1-13-25; 1-37-73; 1-31-61; 1-29-57. Die 8 Ecken des anderen Z_{16} mit geraden Zahlen sind die arithmetischen Mittel zwischen den zwei Zahlen der I. und II. Klasse, die auf den 4 von einer Ecke ausgehenden Körperdiagonalen der Grenzwürfel liegen: z. B. ist die Ecke [14] Mittelwert von 27 und 1; von 19 und 9; von 7 und 21; von 3 und 25. Sie sind auch die Mittelwerte von den 3 Paaren Flächenzahlen (f), die dem Diametralpunkt am nächsten liegen; so ist [14] Mittelwert von 13 und 15, von 5 und 23, von 11 und 17. Auf Grund dieser Eigenschaft wurde die Stellung aller Eckzahlen in den beiden Lösungsschemata bestimmt. Wie schon erwähnt wurde, beträgt die Summe der 3 Zahlen in den Kanten des zweiten Z_{16} immer 123. Von Ecke [14] z. B. gehen folgende 6 Kanten (Flä-

chendiagonalen) aus: 14-59-50; 14-65-44; 14-67-42; 14-69-40; 14-71-38; 14-77-32. An jeder Ecke des Z_8 stossen 6 Grenzquadrate zusammen; in diesen Quadraten sind die Ecken des zweiten Z_{16} (die Zahlen der III. Klasse) wieder die arithmetischen Mittel der nicht anliegenden Kantenmitten; so ist [14] Mittelwert von 8 und 20, von 12 und 16, von 6 und 22, von 24 und 4, von 18 und 10, von 2 und 26. Die Kanten der beiden Z_{16} schneiden sich in den 24 Flächenmittelpunkten (f) des Z_8. Diese 24 Punkte bilden die Ecken eines regelmässigen 24-Zells, eines zu sich selbst dualen Polytops, das von 24 Oktaedern begrenzt wird. Es kann in 3 Z_{16} zerlegt werden, die zu je zweien ein Z_8 bilden. Auf eine Zahlenverteilung in diesem Gebilde soll hier nicht weiter eingegangen werden, da sie auch wesentlich komplizierter ist.

Bei der als Beispiel für den zweiten Klassifikationsfall gewählten Lösung sind die 3 mittleren Quadrate D, E, F identisch mit den darüber stehenden. Die frühere w-Zahl 27 wird zur Eckzahl; und zwar kann sie bei den 4 hier ableitbaren Lösungen eine der Stellen x einnehmen, je nachdem statt 73 die Zahlen 61, 57 oder 1 als w-Zahlen gewählt werden. Das gleiche wie für 27 gilt auch für die anderen w-Zahlen (3, 7, 19) und für die aus der zweiten Lösung des ersten Falles sich ergebenden Ableitungen, sodass die Gesamtzahl gleich $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ ist. Die Eckzahlen des früheren Grenzwürfels A, B, C rücken in einen Würfel 2^3 zusammen, in dessen Körperdiagonale 50-73 noch die Zahl 27 steht. Mittelwert dieser 9 Zahlen ist 41. Auch hier sind dieselben Mittelwert- und Differenzenbildungen wie früher möglich; jedoch ist die topologische Lage der Zahlen eine andere, weil keine Symmetrie mehr vorhanden ist.

Der dritte Fall leitet sich aus dem zweiten ab, indem man die 3 Quadrate B, E, H beibehält und eine der Zahlen 1 oder 57 zur w-Zahl macht. Die Zahlen 3 und 55 nehmen jetzt Kantenmitten ein. Auch hier gehören zum gleichbleibenden mittleren Quadrat E 4 Lösungen, da 61 auch an Stelle von 73 treten kann. Entsprechend den $\binom{4}{2}$ Kombinationen für das Quadrat E gibt es also $6 \cdot 4 = 24$ Lösungen. Aus Symmetriegründen sind die aus der zweiten Lösung des ersten Falles ableitbaren Lösungen mit den obigen 24 identisch. Die 4 Zahlenpaare in den Kantenmitten (61, 55, 57, 3) vertreten die 4 Dimensionsrichtungen, während im zweiten Falle die 4 Dimensionen durch

die 3 Zahlenpaare in Kantenmitten (61, 57, 1), die der Ecke 50 benachbart sind, und durch die Kante 50-55 vertreten sind. Beim dritten Fall ermöglichen die Zahlen der III. Klasse, (die hier alle in Flächenmitten stehen), sowohl mit den Kanten- als Würfelzahlen einen geschlossenen Zug unmittelbar benachbarter Zahlen:

$$14 \; {61 \atop 73} \; 42 \; {79 \atop 7} \; 38 \; {25 \atop 81} \; 32 \; {27 \atop 19} \; 68 \; {21 \atop 9} \; 40 \; {3 \atop 75} \; 44 \; {57 \atop 1} \; 50 \; {55 \atop 63} \; 14.$$

VI. SCHNITTE DURCH DAS ACHTZELL UND GLEICHGEWICHT DER ZAHLEN.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage der Zahlen im Achtzell, Würfel und Quadrat sind die Abstände paralleler Schnitte von einem Schnitt durch die Mitte des Gebildes in Betracht zu ziehen. Als Beispiel seien in allen 3 Fällen Schnitte senkrecht zu einer Diagonalen D_n gewählt. Das Achtzell (von der Kantenlänge 4) ist durch parallele R_3-Räume zu schneiden. (s. Fig. 4). Der Mittelschnitt (0) ist ein regelmässiges Oktaeder von der Kantenlänge $4\sqrt{2}$. Im Abstand ± 1 wird das Z_8 in Tetraedern von der Kantenlänge $6\sqrt{2}$ geschnitten, deren Ecken so abgeschnitten sind, dass von ihren 4 Seitenflächen noch regelmässige Sechsecke übrig bleiben. Die Schnitte sind also 12-eckige halbreguläre Körper von der Kantenlänge $2\sqrt{2}$. In den Abständen ± 2 und ± 3 sind die Schnitte vollständige Tetraeder mit Kanten $4\sqrt{2}$ bzw. $2\sqrt{2}$. Im Abstand ± 4 nehmen die Schnitträume nur noch die Endpunkte der Zelldiagonalen auf. Eine Zusammenstellung der Schnitte, eingeordnet in das frühere Zahlenschema, ist hier

4	3	2	3	2	1	2	1	0
3	2	1	2	1	0	1	0	−1
2	1	0	1	0	−1	0	−1	−2
3	2	1	2	1	0	1	0	−1
2	1	0	1	0	−1	0	−1	−2
1	0	−1	0	−1	−2	−1	−2	−3
2	1	0	1	0	−1	0	−1	−2
1	0	−1	0	−1	−2	−1	−2	−3
0	−1	−2	−1	−2	−3	−2	−3	−4

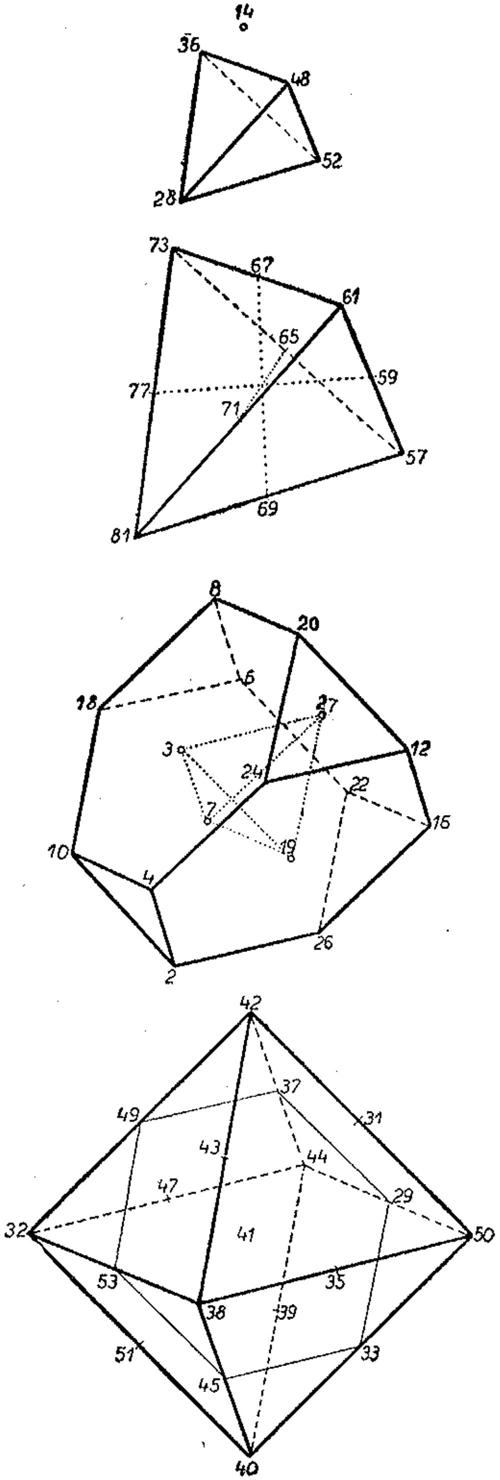
14
36
48
52
28
73
67
61
65
59
77
71
57
69
81
8
20
6
18
27
3
12
24
22
7
16
10
19
4
26
2
42
37
49
31
43
44
47
29
32
41
50
53
35
38
39
51
33
45
40

Fig. 4.

gegeben. Die Zahlen bedeuten die absoluten Abstände vom Mittelschnitt 0. Die statischen Momente sind die Produkte der Zahlen des Achtzells mit den Abstandszahlen, die sich in gleicher Lage im neuen Schema befinden. Die Gesamtsumme ist in allen Lagen des Achtzells bei allen Lösungen immer Null, was eben Gleichgewicht bedeutet. Der « erste Fall » zeigt auch bei den Schnitten Sonderheiten, die den anderen Lösungen nicht eignen. An Hand der Fig. 4, die ausser dem Mittelschnitt die Hälfte der anderen Schnitte senkrecht zur Zelldiagonalen 14-68 wiedergibt, sei auf diese hingewiesen. Das Oktaeder zeigt ganz die Eigenschaften, auch in bezug auf seine vier- und sechseckigen Schnitte, wie sie früher beim Würfel 3^3 erwähnt wurden (1). Zusammen mit den Verbindungen nach den Endpunkten der Zelldiagonalen 14-68 bildet es das Z_{16} mit den geraden Eckzahlen. Beim Schnitt des halbregulären Achtflächners sind die Eckpunkte von jeder gemeinsamen Kante der Sechsecke von Zahlen besetzt, deren Mittelwert 14 ist. In den Mittelpunkten der Sechsecke stehen die Zahlen der II. Klasse, die das Z_8 eindeutig bestimmten; auch ihr Mittelwert ist 14. Beim grösseren Tetraeder steht der Mittelwert je zweier Ecken in den Kantenmitten, die ihrerseits immer 68 zum Mittelwert haben. Beim kleinen Tetraeder ist der Mittelwert der Ecken gleich 41, der Zahl im Zellmittelpunkt. In anderer Form wurde auf diese Sachverhalte teilweise schon hingewiesen. Wählt man die Schnitte senkrecht zu einer anderen Zelldiagonalen, etwa 57-25, die dem Z_{16} mit ungeraden Zahlen angehört, so treten andere Symmetrieeigenschaften auf, die im einzelnen festzustellen dem Leser überlassen sei. Hier ist z. B. der Mittelwert von 5 Zahlen, dem Endpunkt der Diagonalen (57) und den 4 benachbarten Eckpunkten des grösseren Tetraeders (14, 50, 44, 40) immer gleich 41. In den Kantenmitten dieses Tetraeders stehen Zahlen, die je zwei Eckzahlen zur Summe 123 ergänzen; gegenüber liegende Kantenzahlen $\begin{matrix} 29 & 33 & 39 \\ 69 & 65 & 59 \end{matrix}$ werden ihrerseits durch 25 (die Zahl am anderen Ende der Zelldiagonalen) zu 123 ergänzt. Es besteht also eine gewisse Dualität zwischen Mittelwert- und Differenzenbildung bei den zwei 16-Zellen, in die das Achtzell zerlegt werden kann.

(1) Mit den Zahlen einer arithmetischen Reihe ist aber eine solche Verteilung nicht möglich.

Während die zuletzt genannten Zahlen im ersten Lösungsschema scheinbar zerstreut liegen, wie z. B. das Tripel 39, 25, 59, erscheinen sie bei der zweiten Lösung in symmetrischer Anordnung.

Beim oben gegebenen Schema der Abstandszahlen können die 3 mittleren Quadrate D, E, F auch die Schnitte in relativen Abständen durch einen Würfel 3^3 versinnbilden. Angewandt auf das früher gegebene Beispiel sind die Schnitte senkrecht zur Körperdiagonalen 1-27 folgende:

		24	16 8	2 21 10		
	17				13 5	
1		3 19	22 14 6	9 25		27
	23 15				11	
		18 7 26	20 12	4		

Auch hier verschwindet die Summe der statischen Momente, denn

$$1 \cdot \mathit{3} + 55 \cdot \mathit{2} + 97 \cdot \mathit{1} + \mathit{0} - 71 \cdot \mathit{1} - 29 \cdot \mathit{2} - 27 \cdot \mathit{3} = 0 \quad .$$

Beim Quadrat (E) ist es ebenso, was eine unmittelbare Folge der Mittelwertbildung ist:

$$8 \cdot \mathit{2} + 4 \cdot \mathit{1} + \mathit{0} - 16 \cdot \mathit{1} - 2 \cdot \mathit{2} = 0 \quad .$$

Man könnte mit demselben Ergebnis die Schnitte auch in anderer Weise durch das Achtzell legen. Doch sei darauf nicht weiter eingegangen, vielmehr kehren wir noch einmal zu den beiden Konstruktionsmethoden des Achtzells zurück.

VII. VERGLEICH DER BEIDEN LÖSUNGSARTEN.

Vergleicht man die beiden Lösungsmethoden mit einander, so hat die zweite (die der Mittelwert- und Differenzenbildung) für eine praktische Durchführung des Problems sicher den Vorzug; während man für Beweise und eine tiefere Einsicht immer die erste Methode (Bewegungstransformationen des Achtzells der Fig. 3) anwenden wird. Betrachten wir den so ausführlich behandelten « ersten Fall » auch kurz in der anderen Methode. Wenn A eine $\frac{1}{4}$-Drehung des Achtzells

um eine der 6 Koordinatenebenen bedeutet, so ist A^2 die $\frac{1}{2}$-Drehung und $A^3 = A^{-1}$ die $\frac{1}{4}$-Drehung im entgegengesetzten Sinn um dieselbe Ebene. B bedeute die entsprechende Drehung um eine andere Koordinatenebene und zwar um die, die mit der ersten nur den Ursprung, keine Achse gemeinsam hat; z. B. die $x_1 x_3$-Ebene und die $x_2 x_4$-Ebene. In diesem Falle ist die Multiplikation der Operationen auch kommutativ, also $A \cdot B = B \cdot A$. Die vierziffrigen Zahlenkombinationen in den Z_8-Punkten kommen auf folgende Weise zustande:

die 1. Ziffer durch die Identität oder Umwendung	J	oder	$A^2 \cdot B^2$
» 2. » » » Doppeldrehungen	$A \cdot B$	»	$A^{-1} \cdot B^{-1}$
» 3. » » » »	$A \cdot B^{-1}$	»	$A^{-1} \cdot B$
» 4. » » » einfachen $\frac{1}{2}$-Drehungen	A^2	»	B^2

In der zweiten Spalte stehen die mit $A^2 \cdot B^2$ multiplizierten Transformationen der ersten Spalte. Beide Spalten ergeben dieselbe Lösung; wählt man aber in den 4 Reihen einmal oder dreimal die im Schema rechts stehende Transformation, so erhält man die andere Lösung des ersten Falles. Diese 8 Transformationen zusammen bilden eine Gruppe G_8, die eine Untergruppe der alternierenden Gruppe des Achtzells ist. Wegen der Gruppeneigenschaft kann die Reihenfolge der 4 Ziffern bei den Kombinationsbildungen auch ganz beliebig gewählt werden. Entsprechend den 3 Paaren der Koordinatenebenen gibt es 3 solcher G_8, die aber immer zu einer der beiden Lösungen führen. Auch 4 von den 8 sogenannten Vierergruppen von F. KLEIN und deren Kombinationen unter einander führen zu den Lösungen des ersten Falles. Die anderen 4 Vierergruppen bestehen aus Operationen, die die « Einerebenen » der Fig. 3. in verbotener Weise transformieren, sodass deren Ausschluss sich gruppentheoretisch genau definieren lässt. Die 8 Vierergruppen mit den 3 oben erwähnten G_8 bilden eine Gruppe G_{32}. Eine KLEINsche Vierergruppe besteht in geometrischer Deutung ausser der Identität aus 3 verschiedenen $\frac{1}{2}$-Drehungen um Ebenen, die 2 Paare gegenüber liegender Flächendiagonalen enthalten; 4 Eckpunkte des Z_8 sind also Ruhepunkte der Transformationen. In den ebenen Figuren 2. und 3. wäre eine Rechts-Links-Spiegelung eine solche

Operation. Es gibt 12 von diesen Rotationsebenen. Ihre Gleichungen sind von der Form

$$x_i \pm x_j = x_k \pm x_m = 0 \quad ,$$

wo $i, j\, k, m$ eine Permutation von $1, 2, 3, 4$ ist.

VIII. DIE ZWEI LETZTEN BEDINGUNGEN FÜR EINE VERALLGEMEINERUNG.

Zum Abschluss der Untersuchung seien hinreichende Bedingungen angegeben, die eine Erweiterung des Problems im Sinne der 3) und 4) Forderung (bei Formel [3]) ermöglichen. Wir beschränken uns auf den Fall, dass die Kanten mit einer ungeraden Anzahl p von Zahlen besetzt sind. Für gerades p ist die Lösungsmethode in manchen Punkten verschieden; für p von der Form $4m$ einfacher, und für $p = 4m + 2$ etwas umständlicher. Auch ist die Frage offen gelassen, ob die Bedingung 4) im Falle $p = 4m + 2$ erfüllbar ist oder nicht (¹). Nach der Bedingung 3) lässt es sich beim Achtzell im Falle $p = 15$ zum ersten Mal verwirklichen, dass die Flächen- und Körperdiagonalen in allen Schichten und Würfeln die gleiche Summe der p Zahlen haben. Gehen wir zurück zur Fig. 2. Von Punkt 0 gehen nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 4 Kanten parallel den 4 Dimensionsrichtungen aus; ebenso $\binom{4}{2} = 6$ Flächendiagonalen nach den Punkten $\alpha + \beta$; $\gamma + \delta$ usw., dann $\binom{4}{3} = 4$ Körperdiagonalen nach den Punkten $\alpha + \beta + \gamma$; $\beta + \gamma + \delta$, usw., endlich 1 Zelldiagonale nach $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. Das gleiche gilt für jeden anderen Eckpunkt. Auf allen Verbindungslinien und den Parallelen dazu muss die Summe der p Zahlen gleich sein. Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ihre additiven Verbindungen erhalten jetzt noch eine andere Bedeutung. Ausser dass sie die Zahlen in den Eckpunkten bezeichnen, geben sie auch die Differenz in den arithmetischen Reihen an, mit denen die Verbindungen der Ecke 0 mit den anderen Eckpunkten und die Parallelen dazu zu besetzen sind. Würden also zwei Ecken gleiche Zahlen

(¹) Vgl. «Am. J. of Math. *19*», (1897), pp. 99 ff.

enthalten, so wären auch alle Zahlen der Verbindungslinie mit diesen gleich. Die Parallelen zu dieser Verbindungslinie enthielten dann auch gleiche, von den vorigen aber verschiedene Zahlen, sodass die Summe in allen Parallelen niemals dieselbe sein kann. Deshalb ist es notwendig, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ihre additiven Verbindungen alle verschieden sind. Gleiche Zahlen dürfen höchstens in einer Zelldiagonalen D_α auftreten, weil zu diesen keine Parallelen existieren. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ müssen auch relativ prim zu p sein; denn sonst würden sich in den Kanten gleiche Zahlen gruppenweise wiederholen. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Potenzen von 2, also 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 wählt. Zweckmässig ist es im Falle $p = 2^n - 1$, statt der höchsten Potenz von 2 die um 1 kleinere Zahl zu wählen, weil dann in der Zelldiagonalen mit gleichen Ziffern sofort die richtige Summe auftritt. Ist p keine Primzahl, so müssen in der natürlichen Zahlenfolge Umstellungen vorgenommen werden, sodass z. B. für $p = 15$ auch bei Dreier- und Fünfersprüngen von jeder Zahl aus sich die gleiche Summe bilden lässt. Dem Gedankengang nach sei jetzt die Lösung für die Fälle 15^4 und 17^4 gegeben. Es sei $p = 15$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, $\delta = 7$. In den von 0 ausgehenden Kanten stehen also die aritmethischen Reihen

nach α:	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
nach β:	15	13	11	9	7	5	3	1	14	12	10	8	6	4	2
nach γ:	15	11	7	3	14	10	6	2	13	9	5	1	12	8	4
nach δ:	15	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7

Statt der Zahl 15 ist die kongruente Zahl 0 zu setzen; negative Zahlen sind im Schema schon durch die (mod 15) kongruenten positiven ersetzt. Die letzte Spalte enthält die für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewählten Werte. Stellt man die additiven Verbindungen zusammen und zwar geordnet nach gegenüber liegenden Punkten, so ersieht man, dass alle 15 Zahlen in den 16 Eckpunkten vorkommen und die Summe in der Zelldiagonalen 7, 7, 7, ... die gleiche wie in anderen Reihen oder Diagonalen ist.

$$\begin{array}{llll}
\alpha = 1, & \beta + \gamma + \delta = 13; & \alpha + \beta = 3, & \gamma + \delta = 11; \\
\beta = 2, & \alpha + \gamma + \delta = 12; & \alpha + \gamma = 5, & \beta + \delta = \ \ 9; \\
\gamma = 4, & \alpha + \beta + \delta = 10; & \alpha + \delta = 8, & \beta + \gamma = \ \ 6; \\
\delta = 7, & \alpha + \beta + \gamma = \ \ 7; & 0 = 0, & \alpha + \beta + \gamma + \delta = 14.
\end{array}$$

Um zu erreichen, dass in der natürlichen Zahlenreihe 0 bis 14 bei Dreier- oder Fünfersprüngen keine Gruppen mit verschiedenen Zahlenwerten auftreten, (was in manchen Diagonalen vorkommt), ordnen wir die Zahlen in ein rechteckiges Schema ein, derart dass in Reihen

4	13	14	3	1	= 35
5	6	7	8	9	= 35
12	2	0	10	11	= 35
21	21	21	21	21	

und Spalten sich je gleiche Summen ergeben. Die ursprünglichen Zahlen werden dann durch eine dem Schema gesetzmässig entnommene Zahlenfolge ersetzt, wobei die Zahl 7 erhalten bleibt:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	6	0	3	9	12	13	7	10	1	5	2	14	8	11

Wenn bei den 4 Bewegungstransformationen des Achtzells (zur Bildung vierziffriger Kombinationen im Zahlensystem mit der Basis 15) die Zelldiagonale mit gleichen Ziffern nicht mehrmals zusammenfällt, und wenn die Dimensionsrichtungen durch die Bewegungen zyklisch vertauscht werden, dann kommen alle Kombinationen wirklich zustande, sodass für 15^4 die Aufgabe gelöst ist.

Bei 17^4 wählt man $\delta = 8$; (allgemein bei noch grösseren Zahlen p, $\delta = \frac{p-1}{2}$). In den Ecken tritt keine Zahl mehr zweimal auf, und weil 17 Primzahl ist, kann die Reihenfolge der Zahlen ganz beliebig genommen werden. Der Sinn der Bedingung 4) sei an einem Beispiel der Ebene gezeigt. Das folgende Quadrat setzt sich aus vier gleichen

15	10	3	6	15	10	3	6
4	5	16	9	4	5	16	9
14	11	2	7	14	11	2	7
1	8	13	12	1	8	13	12
15	10	3	6	15	10	3	6
4	5	16	9	4	5	16	9
14	11	2	7	14	11	2	7
1	8	13	12	1	8	13	12

Quadraten zusammen. Wie man auch ein 4^2 herausgreift, immer sind auch in den Diagonalen die Bedingungen für ein Zahlenquadrat erfüllt. Setzt man in ähnlicher Weise 16 gleiche Z_8 zu einem linear doppelt so grossen zusammen, so kann jede Zahl zum Mittelpunkt des Zells gewählt werden. Bestimmt man die Anzahl der verschiedenen Diagonalen mit den jetzt hinzugekommenen Nebendiagonalen, so ändert sich Formel [2] in

$$\text{[2}a\text{]} \qquad D'_k = 2^{k-1} \binom{n}{k} p^{n-1} \quad ,$$

sodass $\sum D'_k$ angibt, auf wie viele Weisen sich die konstante Summe von p Zahlen bilden lässt:

$$\text{[3}a\text{]} \qquad \sum_k D'_k = \frac{1}{2}(3^n - 1) p^{n-1} \quad .$$

Im Falle 17^4 ist die Anzahl 196 520, gegenüber 23 400, die durch die Forderungen 1) bis 3) verlangt werden.